

Brownian 运动首次离开指定边界的概率表达式*

邹浪, 蓝师义

(广西民族大学理学院, 广西南宁 530006)

摘要: Brownian 运动在随机过程与 Schramm-Loewner 演变 (SLE) 中扮演着非常重要的角色。首先, 利用 Brownian 运动的性质导出了 Brownian 运动首次离开指定区域边界的概率表达式, 并且通过数值模拟进一步验证了所得到结果的正确性。其次, 讨论单连通域内调和测度与 Brownian 运动首离指定边界概率之间的关系, 通过后者结果给出了前者的具体表达式, 同时得到一些相关的结果。

关键词: Brownian 运动; 首离概率; Schramm-Loewner 演变; 调和测度

中图分类号: O211 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579 (2016) 06-0044-09

The probability expressions of first exit for Brownian motions at prescribed boundary parts of regions

ZOU Lang, LAN Shiyi

(College of Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China)

Abstract: Brownian motion plays a very important role in both stochastic process and Schramm Loewner Evolution (SLE). Firstly, by using the properties of Brownian motions, it is derived that the probability expressions of Brownian motion exiting first at prescribed boundary parts of regions. The correctness of the obtained results is verified by numerical simulations. Secondly, the relationship between harmonic measure and probability of Brownian motion exiting first a simply connected domain at the specified boundary is discussed. The probability formulas of the former are derived by using the results of the latter. In addition, some other related results are obtained.

Key words: Brownian motion; probability of first exit; Schramm-Loewner Evolution; harmonic measure

Brownian 运动是一种重要的随机过程。国内外许多学者对它进行了大量研究, 并得到了许多很好的结果。文 [1] 研究了在空间任一点出发的 Brownian 运动在球内停留时间的分布与球面首中时分布; 文 [2-3] 分别研究了 Brownian 运动首中与末离的联合分布及 Brownian 关于线性边界的首出时间问题, 求出了 Brownian 运动停留在双侧 (单

侧) 逐段线性边界内的概率的分析表达式; 文 [4-5] 研究了 Brownian 运动首中与末离的联合分布及末遇分布与极大游程等相关内容; 文 [6-8] 分别证明了 Brownian 运动 $B[0,1]$ 割点、先驱点、边界的 Hausdorff 维数分别为 $3/4$, $7/4$, $4/3$ 。同时, Brownian 运动的首中时与首出时的分布在很多方面有着重要的应用, 例如, 在非参数统计、序列分析

* 收稿日期: 2015-12-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11161004, 11661011); 广西自然科学基金资助项目 (2013GXNSFAA019015, 2016GXNSFAA380099); 广西民族大学研究生创新计划资助项目 (gxunchxs2015093)

作者简介: 邹浪 (1989 年生), 男; 研究方向: 随机 Loewner 演变; 通讯作者: 蓝师义; E-mail: shiyilan05@sina.com

和财政金融等方面 (见文 [5, 9 - 10])。另一方面, Schramm^[11]于 2000 年将时间改变的 Brownian 运动作为驱动函数引入到 Loewner 微分方程, 这导致了一个新的研究领域, 即随机 Loewner 演变 (或 Schramm-Loewner 演变), 简称 SLE。有关 SLE 的背景知识和详细内容可参见文 [12 - 13] 等。已经知道 SLE 有很多重要的应用, 其中最重要的应用之一是它被成功地用来解决了 Brownian 运动的相交指数问题 (见文 [14 - 16] 等)。此外, 也已经证明 SLE 是许多离散统计物理模型的尺度极限, 例如, 临界点渗流探索路径收敛于 SLE₆^[17]; 回路删除随机走动收敛于 SLE₂ 与一致生成树 Peano 路径收敛于 SLE₈^[18]; 调和探索过程路径与离散 Gaussian 自由场的回路线收敛于 SLE₄ 及 FK Ising 模型的接口收敛于 SLE_{16/3}等^[19 - 21]。

本文将讨论 Brownian 运动首次离开指定区域边界的概率公式。文 [22] 给出了从区间 $[a, b]$ 内一点开始一维的 Brownian 运动首次离开端点 a 或 b 的概率表达式。本文利用 Brownian 运动的性质将这个结果推广 $d (d \geq 2)$ 维 Brownian 运动的情形。首先, 导出了 d 维 Brownian 运动的几个相关结果; 基于这些结果, 讨论了 d 维 Brownian 运动第 1 次离开单连通区域指定边界的概率估计, 给出了二维 Brownian 运动分别从圆盘上半边界、弓形域弧边界与第一象限域边界首次离开的概率表达式; 同时, 对二维 Brownian 运动从上半单位圆盘域的圆弧边界的首次离开的概率进行了 Monte Carlo 模拟, 从得到的结果可以看出, 它们非常接近于相应理论概率的数值, 这验证了结果的正确性。然后, 推出了三维 Brownian 运动从第一卦限区域的指定边界首次离开的概率表达式。最后, 讨论了调和测度与二维 Brownian 运动首次离开单连通指定边界的概率之间的关系。应用后者的结果, 推出调和测度的一些具体表达式; 此外, 对于两个相互独立的一维标准 Brownian 运动 B_t 和 \bar{B}_t , 本文给出了 $|B_t|$ 碰到 a 之前 $|\bar{B}_t|$ 不碰到 b 的概率表达式, 对于任意 $a > 0, b > 0$ 。

1 Brownian 运动及相关结果

首先, 简要地介绍一维和二维 Brownian 运动的定义和一些性质, 并导出本文后面将用到的一些相关结果。有关更详细的背景知识可见文 [22 - 23] 等。

定义 1 一个随机过程 B_t 称为一个一维的标准 Brownian 运动, 如果它满足下面条件:

- (i) $B_0 = 0, a. s.;$
- (ii) 对所有的 $s \leq t, B_t - B_s$ 是一个均值为 0 方差为 $t - s$ 的 Gaussian 随机变量;
- (iii) 对所有的 $s \leq t, B_t - B_s$ 独立于 $\sigma(B_r, r \leq s);$
- (iv) 映射 $t \rightarrow B_t(\omega)$ 几乎肯定是连续的。

这里 $\sigma(B_r, r \leq s)$ 是关于每一个 $B_r, r \leq s$ 都可测的最小 σ 域。一个均值为 0 方差为 σ^2 的 Gaussian 随机变量 X 的分布密度函数是由下面公式给出

$$P(X \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

其中 A 为任意一个 Borel 集。

定义 2 设 $d \geq 2$, 如果令 $(B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$ 表示 d 个相互独立的一维标准 Brownian 运动, 那么 $B_t^{(d)} = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d)$ 称为一个 d 维的标准 Brownian 运动。

设 $B_t^{(d)}$ 是一个 d 维的标准 Brownian 运动, 则它的转移概率密度为

$$p(t, x, y) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{2t}\right) \quad (1)$$

也就是, 式 (1) 理解为一个 d 维的标准 Brownian 运动从 x 点开始经过时间 t 到达 y 的概率密度为 $p(t, x, y)$ 。

引理 1 设 $X(t)$ 是一个从点 $x: a < x < b$ 开始的一维 Brownian 运动而 $\tau_{[a,b]}$ 表示 $X(t)$ 离开区间 $[a, b]$ 的第一时间。那么 $\tau_{[a,b]} < \infty a. s.$, 并且

$$P^x(X(\tau_{[a,b]}) = a) = \frac{b - x}{b - a},$$

$$P^x(X(\tau_{[a,b]}) = b) = \frac{x - a}{b - a}$$

证明 该引理的证明见文 [22] 中的命题 4.9。

引理 2 设 $X(t)$ 是一个一维标准 Brownian 运动, 令 $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$, 令 $a > 0$, 那么有

$$P^0(M_t \geq a) = 2P^0(X_t > a) \quad (2)$$

证明 该引理的证明见文 [22] 中的定理 3.8。

推论 1 设 B_t 是一个一维的标准 Brownian 运动。对于给定大于 0 的实数 a , 设 $T_a = \inf\{t \geq 0: B_t = a\}$, 那么

$$P^0(T_a \leq t) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

这里 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ 。

证明 由一维标准 Brownian 运动的定义知道, B_t 是一个均值为 0 方差为 t 的 Gaussian 随机变量。

令 $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$, 那么事件 $T_a \leq t$ 与事件 $M_t \geq a$ 所表达的含义一样, 即 $P^0(T_a \leq t) = P^0(M_t \geq a)$ 。由等式 (2) 得到 $P^0(T_a \leq t) = 2P^0(B_t > a) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right)$, 其中函数 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, 这就完成了这个推论的证明。

定理 1 假设 $B_t^{(d)}$ 是一个取值于 \mathbf{R}^d 上的 d 维标准 Brownian 运动, 那么对任意给定时间 $0 \leq t < +\infty$, 存在依赖于 Brownian 运动维数 d 的常数 C 使得 $E(|B_t^{(d)}|) = C\sqrt{t}$, 即当给定时间 t 时, d 维标准 Brownian 运动离开起始点的平均距离为 $C\sqrt{t}$, 其中 C 由下面公式给出

$$\begin{cases} C = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, & d = 1 \\ C = C_1 \sqrt{2^{d-1}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right), & d \geq 2 \end{cases}$$

其中

$$C_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi (2\pi)^{-d/2} \sin^{d-2} \varphi_1 \cdots \sin^{d-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{d-2} d\varphi_1 d\varphi_2 \cdots d\varphi_{d-1},$$

特别地, 当 $d = 2, 3, 4$, C 的值分别为 $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \frac{3\sqrt{2\pi}}{4}$ 。

证明 设 d 维 Brownian 运动 $B_t^{(d)}$ 在 t 时刻的坐标为 $B_t^{(d)} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ 。则它在 t 时刻与出发点距离的期望为

$$E(|B_t^{(d)}|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)^{1/2} (2\pi t)^{-d/2} \cdot \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^d x_i^2}{2t}\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_d \quad (3)$$

当 $d = 1$ 时, 容易计算得到

$$E(|B_t|) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{r}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{r^2}{2t}\right) dr = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}$$

当 $d \geq 2$ 时, 引入如下 d 维球坐标变换:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \dots, \\ x_{d-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{d-2} \cos \varphi_{d-1}, \\ x_d &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{d-2} \sin \varphi_{d-1} \end{aligned}$$

则它的雅可比行列式及积分区域分别为:

$$J = r^{d-1} \sin^{d-2} \varphi_1 \sin^{d-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{d-2} \text{ 和 } 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{d-2} \leq \pi, 0 \leq \varphi_{d-1} \leq 2\pi$$

于是式 (3) 就变成

$$E(|B_t^{(d)}|) = \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \cdots \int_0^{2\pi} J r (2\pi t)^{-d/2} \cdot$$

$$e^{-\frac{r^2}{2t}} d\varphi_1 \cdots d\varphi_{d-1} dr = C_1 \int_0^{+\infty} \frac{r^d}{t^{d/2}} e^{-\frac{r^2}{2t}} dr \quad (4)$$

这里

$$C_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi (2\pi)^{-d/2} \sin^{d-2} \varphi_1 \cdots \sin^{d-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{d-2} d\varphi_1 d\varphi_2 \cdots d\varphi_{d-1}$$

为一个只依赖于 d 的常数。

在式 (4) 中令 $r^2/(2t) = x$, 则得到

$$E(|B_t^{(d)}|) = C_1 \sqrt{t} \sqrt{2^{d-1}} \int_0^{+\infty} x^{\frac{d+1}{2}-1} e^{-x} dx =$$

$$C_1 \sqrt{2^{d-1}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \sqrt{t} = C \sqrt{t}$$

其中 $C = C_1 \sqrt{2^{d-1}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)$ 是一个只依赖于 d 的常数, $\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s} ds$ 是 Gamma 函数。因此, 我们就完成了这个定理的证明。

定理 2 给定两个正数 $a > 0, b > 0$ 。假设 B_t 与 \bar{B}_t 都是从 0 开始且相互独立的一维标准 Brownian 运动, 设 $T_a = \inf\{t \geq 0; B_t = a\}$, $T_b = \inf\{t \geq 0; |\bar{B}_t| = b\}$, 用 $E_{a,b}$ 表示事件 $\{\sup_{0 \leq s \leq t} B_s > a\} \cap \{\sup_{0 \leq s \leq t} \bar{B}_s < b\}$, 则事件 $E_{a,b}$ 发生的概率为

$$P(E_{a,b}) = \frac{2}{\pi} \arctan(b/a)$$

证明 对任意给定时间 $t \geq 0$, 记事件 $\{B_t \geq a\} \cap \{B_{0 \leq s \leq t} < a\}$ 为 E_1 , 那么为 $P(E_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} (P(T_a \leq t) - P(T_a \leq t - \Delta t))$; 记 $\sup_{0 \leq s \leq t} \bar{B}_s < b$ 为事件 E_2 , 那么 $P(E_2) = 1 - P(T_b \leq t)$ 。因此, 在 t 时刻 $E_1 E_2$ 的概率为 $P(E_1)P(E_2)$, 结合推论 1, 得到

$$\begin{aligned} P(E_{a,b}) &= \int_0^{+\infty} (P(T_a \leq t) - P(T_a \leq t - dt))(1 - P(T_b \leq t)) = \\ &= \int_0^{+\infty} 2\left(\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t-dt}}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right)\left(2\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right) - 1\right) = \\ &= \int_0^{+\infty} 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)' \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2t}}\right) dt = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{a}{2t^{3/2}} e^{-\frac{a^2}{2t}} \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2t}}\right) dt = \frac{2}{\pi} \arctan(b/a) \end{aligned}$$

其中 $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 为误差函数, 符号 “'” 表示对 t 求导。这样就完成了这个定理的证明。

定理 3 给定 3 个正数 $a, b, c > 0$ 。假设 $B_t^i (i = 1, 2, 3)$ 都是从 0 开始且相互独立的一维标准 Brownian 运动, 设 $T_a = \inf\{t \geq 0; B_t^1 = a\}$, $T_b =$

$\inf\{t \geq 0; B_t^2 = b\}$, $T_c = \inf\{t \geq 0; B_t^3 = c\}$ 。用 $E_{a,b}^c$ 表示事件 $\{\sup_{0 \leq s \leq t} B_s^1 < a\} \cap \{\sup_{0 \leq s \leq t} B_s^2 < b\} \cap \{\sup_{0 \leq s \leq t} B_s^3 \geq c\}$, 则事件 $E_{a,b}^c$ 发生的概率为

$$P(E_{a,b}^c) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{ab}{c \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (5)$$

证明 对任意给定时间 $t \geq 0$, 记事件 $\{B_t^3 \geq c\} \cap \{B_{0 \leq s \leq t}^3 < c\}$ 为 E_1 , 则 $P(E_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} (P(T_c \leq t) - P(T_c \leq t - \Delta t))$ 。将事件 $\sup_{0 \leq s \leq t} B_s^1 < a$, $\sup_{0 \leq s \leq t} B_s^2 < b$ 分别记为 E_2, E_3 , 那么 $P(E_2) = 1 - P(T_a \leq t)$, $P(E_3) = 1 - P(T_b \leq t)$ 。因此, 在 t 时刻 $E_1 E_2 E_3$ 的概率为 $P(E_1)P(E_2)P(E_3)$, 结合推论 1, 推出

$$\begin{aligned} P(E_{a,b}^c) &= \int_0^{+\infty} P(T_c \leq t) - P(T_c \leq t - dt) \cdot \\ &\quad (1 - P(T_a \leq t))(1 - P(T_b \leq t)) = \\ &\quad \int_0^{+\infty} 2 \left(\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{t-dt}}\right) - \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{t}}\right) \right) \left(2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - 1 \right) \cdot \\ &\quad \left(2\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right) - 1 \right) = \int_0^{+\infty} 2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{t}}\right)' \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2t}}\right) dt \end{aligned} \quad (6)$$

由文 [25] 中的第 123 页的 (2.8.19.8) 等式可以知道, 当 $\operatorname{Re}(p) > 0, |\arg(a)| < \frac{\pi}{4}, |\arg(b)| < \frac{\pi}{4}$ 时, 有

$$\int_0^{+\infty} e^{-px^2} \operatorname{erf}(ax) \operatorname{erf}(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi p}} \arctan \frac{ab}{\sqrt{p(a^2 + b^2 + p)}} \quad (7)$$

令式 (7) 中的 $x = \frac{1}{\sqrt{2t}}, p = c^2$, 那么 $dx = -\frac{1}{2\sqrt{2t}^{3/2}} dt$, 于是有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2t}^{3/2}} e^{-\frac{c^2}{2t}} \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{2t}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{b}{\sqrt{2t}}\right) dt = \\ \frac{1}{c\sqrt{\pi}} \arctan \frac{ab}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned} \quad (8)$$

因此, 由式 (6) 与式 (8) 得到

$$P(E_{a,b}^c) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{ab}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

也就是, 式 (5) 成立, 这就完成了该定理证明。

2 Brownian 运动首次离开指定区域边界的概率公式

基于第 1 节的结果, 将讨论 d 维 Brownian 运动第 1 次离开几种类型单连通区域指定边界的概率估

计, 导出了它们具体表达式。并通过数值模拟验证了所得到结果的正确性。

首先考虑带形区域的情形。给定一个带形区域 $S_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; a < y < b\}, |a|, |b| < +\infty$, $S_{a,b}$ 的下边界与上边界分别记为 $R_a = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y = a\}, R_b = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; y = b\}$, 设 $z = (x_0, y_0)$ 为 $S_{a,b}$ 内的任意一点, 考虑一个从 z 开始的二维 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$, 将 $B_t^{(2)}$ 首次离开带形区域 $S_{a,b}$ 的时间记为 $\tau_{a,b}$ 。下面默认为 $B_t^{(2)} = (B_t^1, B_t^2)$ 与 $B_t^{(2)} = B_t^1 + iB_t^2$ 是同一个二维 Brownian 运动。

定理 4 设 $B_t^{(2)}$ 是一个从点 $z = (x_0, y_0) \in S_{a,b}$ 开始的二维 Brownian 运动, 则 $\tau_{a,b} < \infty$ a. s., 并且有

$$\begin{aligned} P^z(B_{\tau_{a,b}^{(2)}} = R_a) &= \frac{b - y_0}{b - a}, \\ P^z(B_{\tau_{a,b}^{(2)}} = R_b) &= \frac{y_0 - a}{b - a} \end{aligned} \quad (9)$$

证明 首先, 注意到二维 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$ 可以看成是两个独立一维 Brownian 运动 B_t^1 与 B_t^2 的合成, 即 $B_t^{(2)} = (B_t^1, B_t^2)$, 其中 B_t^1 平行于 x 轴, B_t^2 平行于 y 轴。由于带形区域 $S_{a,b}$ 的上下边界之间的宽度 $b - a$ 是有限的, 因此 B_t^2 从 y_0 点出发几乎肯定在有限时间内碰到 a 或 b , 即 $B_t^{(2)}$ 几乎肯定在有限时间碰到 R_a 或 R_b , 这就推出 $\tau_{a,b} < \infty$ a. s.。因为 B_t^1 几乎肯定不可能在有限时间内达到无穷远点, 且由 B_t^1, B_t^2 的独立性以及引理 1, 可推出 (9) 式成立。

其次, 考虑一般单连通区域的情形。设 Ω 是一个由一条简单闭曲线围成的单连通区域 (如图 1 所示), 一个二维 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$ 从 Ω 内部任意点 z 开始, 讨论它第一次碰到任意指定边界 (如图 1 中的粗边界) 的概率表达式。

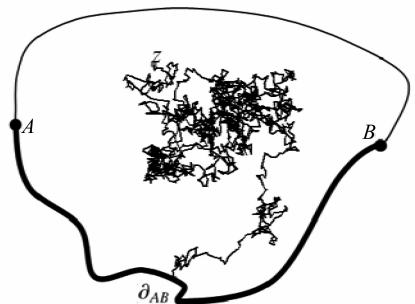


图 1 一个二维 Brownian 运动从单连通域 Ω 的一个指定边界 ∂_{AB} 首次离开的情形

Fig. 1 A 2D-Brownian motion exits first a simply connected domain Ω at a prescribed boundary ∂_{AB}

定理 5 设 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 是由一条简单闭曲线围成的开单连通域且其边界为 $\partial\Omega$, 设 ∂AB 为 $\partial\Omega$ 中指定的任意的连续边界弧 (见图 1)。考虑一个从点 $z \in \Omega$ 开始的二维 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$ 。设 $\tau_\Omega = \inf\{t \geq 0: B_t^{(2)} \notin \Omega\}$, 那么有

$$P^z(B_{\tau_\Omega}^{(2)} \in \partial AB) = \frac{\text{Im}(\varphi(z))}{\pi} \quad (10)$$

这里, φ 是一个从 Ω 到带形区域 $S_\pi = \{z \in \mathbf{C}: 0 < \text{Im} z < \pi\}$ 的共形映射且满足 $\varphi(\partial AB) = R_\pi$, 这里 $R_\pi = \{z \in \mathbf{C}: \text{Im} z = \pi\}$, $\text{Im}(z)$ 表示 z 的虚部。

证明 首先, 由定理 4 可知, 一个从带形区域 S_π 中某一点 $w = u + iv$ 开始二维 Brownian 运动, 它首次从 S_π 上边界 R_π 离开的概率为 $\frac{v}{\pi}$ 。其次, 由 Riemann 映射定理与边界对应原理, 可以找到一个从 Ω 到 S_π 的一个共形映射 φ 使得 $\varphi(\partial AB) = R_\pi$ 。虽然该共形映射 φ 不唯一, 但是对于每一个 $z \in \Omega$, $\text{Im}(\varphi(z))$ 是唯一的。将一个从点 $z \in \Omega$ 开始的二维 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$ 首次从边界 ∂AB 离开的事件记为 E_1 。令 $w = \varphi(z) = u + iv$, 将一个从点 w 开始的二维 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$ 第一次从边界 R_π 离开的事件记为 E_2 。则由二维 Brownian 运动的共形不变性, 可推出 $P^z(E_1) = P^w(E_2)$ 。注意 $v = \text{Im}(\varphi(z))$, 因此, 推出 (10) 式成立。

下面讨论区域 Ω 的 4 种特殊情形:

(i) 当 Ω 是平面 \mathbf{C} 内的一个半径为 r 的圆盘域 D 时, 见图 2 (a)。

推论 2 给定 \mathbf{C} 内的一个半径为 r 的圆盘域 $D = \{x + iy \in \mathbf{C}: (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2, a, b \in \mathbf{R}\}$, 并将它边界 ∂D 的上半圆周记为 $\partial D^+ = \{x + iy \in \mathbf{C}: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, y \geq b\}$ 。设 $B_t^{(2)}$ 是一个从点 $z = x_0 + iy_0 \in D$ 开始的二维 Brownian 运动, 并令 τ_D 表示 $B_t^{(2)}$ 离开圆盘 D 的第一时间, 那么有

$$P^z(B_{\tau_D}^{(2)} \in \partial D^+) = \frac{\text{Im} \varphi \left(\frac{x_0 - a}{r} + i \frac{y_0 - b}{r} \right)}{\pi} \quad (11)$$

这里 $\varphi(z) = \ln \left(i \frac{1+z}{1-z} \right)$ 。

证明 设 $\varphi_1(z) = (z - a - bi)/r$, 则 $\varphi_1(z)$ 把圆盘 $D = \{x + iy \in \mathbf{C}: (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2, a, b \in \mathbf{R}\}$ 共形映射到单位圆盘 $U = \{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$, 且把 D 的上边界 $\partial D^+ = \{x + iy \in \mathbf{C}: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2, y \geq b\}$ 映射到 U 的上边界 $\partial = \{e^{i\theta}$:

$0 \leq \theta \leq \pi\}$ 。记 $\varphi_2(w) = \ln \left(i \frac{1+w}{1-w} \right)$, 则 $\varphi(z) = \varphi_2 \circ \varphi_1(z)$ 把单位圆盘 D 共形映射到带形域 S_π 且把边界 ∂D^+ 共形映射到边界 R_π 。于是, 由定理 5, 推出 (11) 式成立。

(ii) 当 Ω 是平面 \mathbf{C} 内的一个弓形域 B_θ 时, 见图 2 (b)。

推论 3 给定 \mathbf{C} 内的一个弓形域 $B_\theta = \{x + iy \in H: x^2 + (y - \cot(\pi - \frac{\theta}{2}))^2 < 1/\sin^2(\pi - \frac{\theta}{2}), x, y \in \mathbf{R}\}$; 弓形域的圆弧记为 $\partial_\theta = \{x + iy \in H: x^2 + (y - \cot(\pi - \frac{\theta}{2}))^2 = 1/\sin^2(\pi - \frac{\theta}{2}), x, y \in \mathbf{R}\}$, 这里的 $\theta \in (0, 2\pi)$, $H = \{z \in \mathbf{C}: \text{Im} z > 0\}$, 设 $B_t^{(2)}$ 是一个从点 $z = x_0 + iy_0 \in B_\theta$ 开始的二维 Brownian 运动, 并令 τ_{B_θ} 表示 $B_t^{(2)}$ 离开 B_θ 的第一时间, 那么有

$$P^z(B_{\tau_{B_\theta}}^{(2)} \in \partial_\theta) = \frac{\ln \varphi(x_0 + iy_0)}{\pi} \quad (12)$$

这里 $\varphi(z) = \frac{2\pi}{\theta} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ 。

证明 共形映射理论给出 $\varphi(z) = \frac{2\pi}{\theta} \cdot \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ 把弓形域 B_θ 共形映射到带形域 S_π , 且把边界 ∂_θ 映射到边界 R_π 。再由定理 5, 得到 (12) 式成立。

(iii) 当 Ω 是第一象限域 $C_1 = \{z \in \mathbf{C}: \text{Im} z > 0, \text{Re} z > 0\}$ 时, 见图 2 (c)。

推论 4 给定 \mathbf{C} 内的第一象限域 C_1 , 设 $B_t^{(2)}$ 是一个从点 $z = x_0 + iy_0 \in C_1$ 开始的二维 Brownian 运动, 设 $\partial X = \{z \in \mathbf{C}: \text{Re} z > 0, \text{Im} z = 0\}$, $\partial Y = \{z \in \mathbf{C}: \text{Re} z = 0, \text{Im} z > 0\}$ 。并令 τ_{C_1} 表示 $B_t^{(2)}$ 离开 C_1 的第一时间, 那么有

$$\begin{aligned} P^z(B_{\tau_{C_1}}^{(2)} \in \partial X) &= \frac{2}{\pi} \arctan(x_0/y_0), \\ P^z(B_{\tau_{C_1}}^{(2)} \in \partial Y) &= \frac{2}{\pi} \arctan(y_0/x_0) \end{aligned} \quad (13)$$

证明 注意 $\varphi(z) = 2\ln(z)$ 把第一象限域 C_1 共形映射到 S_π 且 $\varphi(\partial Y) = R_\pi$ 。因此根据定理 5, 可推出 $P^z(B_{\tau_{C_1}}^{(2)} \in \partial Y) = \frac{2}{\pi} \arctan(y_0/x_0)$ 。同时, $P^z(B_{\tau_{C_1}}^{(2)} \in \partial X) = 1 - P^z(B_{\tau_{C_1}}^{(2)} \in \partial Y)$, 由此得到 (13) 式的第二等式成立。这就完成了这个推论的证明。

(iv) 设 $\mathbf{R}_1^3 = \{(x, y, z): x, y, z > 0\}$ 是三维空

间 \mathbf{R}^3 的第一卦限域时, 见图 2 (d)。

推论 5 设 $B_t^{(3)}$ 是一个从点 $v = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}_1^3$ 开始的三维 Brownian 运动, 设边界面 $\partial_1 = \{(x, y, z) : x = 0, y, z \in \mathbf{R}\}$, $\partial_2 = \{(x, y, z) : y = 0, x, z \in \mathbf{R}\}$, $\partial_3 = \{(x, y, z) : z = 0, x, y \in \mathbf{R}\}$ 。

并令 $\tau_{R_1^3}$ 表示 $B_t^{(3)}$ 离开 \mathbf{R}_1^3 的第一时间, 则有

$$P^v(B_{\tau_{R_1^3}}^{(3)} = \partial_1) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{y_0 z_0}{x_0 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}};$$

$$P^v(B_{\tau_{R_1^3}}^{(3)} = \partial_2) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{x_0 z_0}{y_0 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}};$$

$$P^v(B_{\tau_{R_1^3}}^{(3)} = \partial_3) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{x_0 y_0}{z_0 \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$$

证明 根据 Brownian 运动的旋转不变性, 三维 Brownian 运动 $B_t^{(3)}$ 可以分解成 $B_t^{(3)} = (B_t^1, B_t^2, B_t^3)$, 这里 B_t^1, B_t^2, B_t^3 相互独立且都从点 $v = (x_0, y_0, z_0)$ 开始, 分别在直线 (\mathbf{R}, y_0, z_0) , (x_0, \mathbf{R}, z_0) , (x_0, y_0, \mathbf{R}) 上运动的一维 Brownian 运动。由于点 v 到边界面 $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ 的距离分别为 x_0, y_0, z_0 , 因此, 由定理 5 可推出该推论成立。

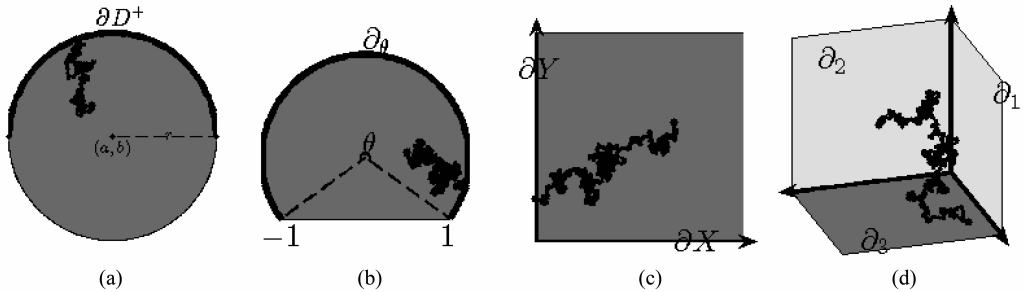


图 2 Brownian 运动分别从 4 个不同区域的指定边界首次离开的情形

Fig. 2 The Brownian motions exit first four distinct regions at the prescribed boundary parts, respectively

给出一个二维 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$ 首次离开上半单位圆盘域 B_π 的边界 ∂_π 的模拟概率与理论概率的数据对比, 通过数学软件 Matlab 并结合 Monte Carlo 模拟方法计算而得出表 1。当模拟 Brownian 运动时间间隔越短时且模拟的次数越多时, 所产生的模拟概率就越精确。这里模拟按每间隔 $\Delta t = 10^{-4}$ s 记录 1 次 Brownian 运动的轨迹坐标,

首先在 B_π 内均匀随机选取了 20 个点作为 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$ 的起始点; 然后对每个起始点模拟 10^4 次第 1 次碰到边界, 并记录 $B_t^{(2)}$ 首次碰到边界 ∂_π 的次数 k , 则 $k/10^4$ 就是 $B_t^{(2)}$ 第 1 次碰到边界 ∂_π 的模拟概率, 所有模拟结果均保留两位有效数字 (见表 1)。

表 1 二维 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$ 第一次碰到 B_π 的边界 ∂_π 的模拟概率与理论概率

Table 1 The simulation and theoretical probabilities of $B_t^{(2)}$ exiting first B_π at the boundary ∂_π

起点坐标	模拟概率	理论概率	起点坐标	模拟概率	理论概率
(0.10, 0.90)	0.93	0.94	(-0.88, 0.08)	0.41	0.40
(-0.43, 0.83)	0.95	0.95	(0.16, 0.68)	0.77	0.77
(0.16, 0.69)	0.78	0.78	(-0.2, 0.85)	0.91	0.91
(-0.41, 0.45)	0.61	0.61	(0.25, 0.67)	0.77	0.78
(0.019, 0.31)	0.39	0.38	(0.80, 0.065)	0.23	0.22
(-0.73, 0.57)	0.92	0.92	(0.13, 0.15)	0.20	0.19
(-0.056, 0.67)	0.74	0.75	(0.69, 0.52)	0.85	0.85
(-0.79, 0.47)	0.89	0.90	(-0.059, 0.24)	0.31	0.30
(-0.74, 0.49)	0.86	0.86	(0.76, 0.057)	0.18	0.17
(0.11, 0.62)	0.72	0.71	(-0.48, 0.57)	0.76	0.76

从表 1 中可以看出, 随机模拟概率与理论概率非常接近, 这验证了我们结论的正确性。

3 调和测度与首离概率的关系

从一个二维 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$ 从单连通区域 D 的指定边界首次离开的概率与调和测度 (关于调和测度的定义可参见文 [24]) 的关系, 可导出了 $B_t^{(2)}$ 从区域 D 的指定有限段不相交边界第一次离开的概率表达式, 并得到了调和测度的精确表达式。此外, 对于两个相互独立的一维标准 Brownian 运动 B_t 和 \bar{B}_t , 还给出了 $|B_t|$ 碰到 a 之前而 $|\bar{B}_t|$ 不碰到 b 概率表达式, 其中 $a > 0, b > 0$ 。

定理 6 设 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 是由一条简单闭曲线围成的单连通区域且其边界分为相连的两部分 ∂_1, ∂_2 。设 $\omega(z)$ 为 Ω 中 z 处 ∂_1 的调和测度, 若 φ 是一个从 Ω 到带形区域 S_π 的共形映射且满足 $\varphi(\partial_1) = R_\pi$, 那么 $\omega(z)$ 可表示为

$$\omega(z) = \frac{\text{Im } \varphi(z)}{\pi}, z \in \Omega$$

证明 考虑一个从点 $z \in \Omega$ 开始的二维 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$ 。设 $\tau_\Omega = \inf\{t \geq 0: B_t^{(2)} \notin \Omega\}$, 且令 $\omega(z) = P^z(B_{\tau_\Omega}^{(2)} \in \partial_1)$, 则显然当 $z \in \Omega$ 趋近于 ∂_1 时 $\omega(z) \rightarrow 1$; 当 $z \in \Omega$ 趋近于 ∂_2 时 $\omega(z) \rightarrow 0$ 。接下来只需证明 $\omega(z)$ 在 Ω 中是一个调和函数即可。根据定理 5 我们得到 $\omega(z) = \text{Im } \varphi(z)/\pi$ 。由于 φ 是一个共形映射, 因此 φ 在 Ω 中是解析且导数不等于 0。于是 $\text{Im } \varphi(z)$ 在 Ω 内是调和的。由调和测度的定义, 推出 $\omega(z)$ 恰好为 Ω 中 z 处 ∂_1 的调和测度。定理 6 证毕。

推论 6 设 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 是由一条简单闭曲线围成的单连通域, 且其边界为分成两部分 $\Gamma_1 = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \gamma_i, \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1, \gamma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是互不相交的简单曲线。若 φ_i 是一个从 Ω 到 S_π 的共形映射且满足 $\varphi_i(\gamma_i) = R_\pi, i = 1, 2, \dots, n$ 。设 $\omega(z)$ 为 Ω 中 z 处 Γ_1 的调和测度, 那么 $\omega(z)$ 可表示成

$$\omega(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\text{Im } \varphi_i(z)}{\pi}, z \in \Omega \quad (14)$$

证明 由假设容易知道, $\sum_{i=1}^n \frac{\text{Im } \varphi_i(z)}{\pi}$ 是在 Ω 中的一个调和函数, 且当 $z \in \Omega$ 趋近于 Γ_1 时 $\omega(z) \rightarrow 1$, 当 $z \in \Omega$ 趋近于 Γ_2 时 $\omega(z) \rightarrow 0$ 。由于 $\omega(z)$ 为 Ω 中 z 处 Γ_1 的调和测度, 因此, 推出 (14) 式成立。

推论 7 设 $\Omega \subset \mathbf{R}$ 是由一条简单闭曲线围成的

单连通域, 且其边界为分成两部分 $\Gamma_1 = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \gamma_i, \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1, \gamma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是互不相交的简单曲线。对于一个从点 $z \in \Omega$ 开始的二维 Brownian 运动 $B_t^{(2)}$, 设 $\tau_\Omega = \inf\{t \geq 0: B_t^{(2)} \notin \Omega\}$, 那么有

$$P^z(B_{\tau_\Omega}^{(2)} \in \Gamma_1) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(z)}{\pi} \quad (15)$$

这里的 φ_i 为 Ω 到 S_π 的共形映射且满足 $\varphi_i(\gamma_i) = R_\pi, i = 1, 2, \dots, n$ 。

证明 根据定理 5, 我们知道 $P^z(B_{\tau_\Omega}^{(2)} \in \gamma_i) = \frac{\varphi_i(z)}{\pi}, i = 1, 2, \dots, n$ 因为 $\gamma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是互不相交的简单曲线, 所以, 由概率的可列可加性推出 (15) 式成立。

引理 3 设 $B_t^{(2)}$ 是上半平面 $H = \{z \in \mathbf{C}: \text{Im } z > 0\}$ 内从 iy 点开始的一个复 Brownian 运动, 令 τ_H 表示 $B_t^{(2)}$ 离开 H 的第一时间。若 $P^{iy}(B_{\tau_H}^{(2)} \in (-1, 1)) = P^{iy}(B_{\tau_H}^{(2)} \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty))$, 其中 $\rho > 1$, 那么 $y = \sqrt{\rho}$ 。

证明 由文 [12] 可知, 从上半平面内点 iy 开始的 $B_t^{(2)}$ 首次离开边界点 $x \in \mathbf{R}$ 的泊松核为 $K(iy, x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$, 那么 $P^{iy}(B_{\tau_H}^{(2)} \in (-1, 1)) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{y}\right)$, 同理 $P^{iy}(B_{\tau_H}^{(2)} \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho}{y}\right)$, 这里 $\rho > 1$ 。由 $\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{\rho}{y}\right)$, 解得 $y = \sqrt{\rho}$ 。

定理 7 给定一个正数 $r > 0$, 设 B_t, \bar{B}_t 都是从 0 点开始的一维标准 Brownian 运动, 且 B_t 与 \bar{B}_t 相互独立, 设 $T_1 = \inf\{t \geq 0: |B_t| = 1\}, T_r = \inf\{t \geq 0: |\bar{B}_t| = r\}$ 。那么

$$P^0(T_1 < T_r) = 1 - \frac{4}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) \quad (16)$$

即 $P^0(T_1 < T_r)$ 表示 $|B_t|$ 先大于 1 而 $|\bar{B}_t|$ 不大于 r 概率为 $1 - \frac{4}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$, 这里 $\rho = h(r)$ 是方程

$$2r = \int_1^\rho \frac{d\xi}{\sqrt{(\rho^2 - \xi^2)(\xi^2 - 1)}} \text{ 的解。}$$

证明 设 $f(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - \rho^2)(\xi^2 - 1)}}$, 由

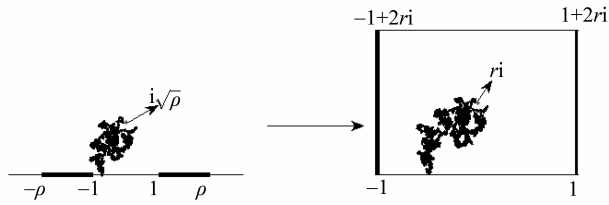


图 3 上半平面 H 中一个二维 Brownian 运动样本共形映射到一个矩形区域的情形

Fig. 3 A sample of 2D Brownian motion in upper half plane H was conformally mapped onto a rectangular domain

Schwarz-Christoffel 公式可以知道 $g(z) = \frac{f(z)}{f(1)}$ 把 H 共形映射到一个宽为 2 高为 $2r$ 的矩形, 即矩形的 4 个顶点分别为 $g(-1) = -1, g(1) = 1, g(\rho) = 1 + 2ri, g(-\rho) = -1 + 2ri$, 如图 3 所示, 其中

$$2r = \int_1^\rho \frac{d\xi}{f(1) \sqrt{(\rho^2 - \xi^2)(\xi^2 - 1)}} \quad (17)$$

记式 (17) 中 ρ 关于 r 的函数的解为 $\rho = h(r)$ 。通过计算我们得到 $g(i\sqrt{\rho}) = ri$, 易知 ri 为矩形的中心。设 $B_i^{(2)} = B_i^1 + iB_i^2$ 是一个起始于点 ri 的复 Brownian 运动, 其中 B_i^1 与 B_i^2 是相互独立一维 Brownian 运动。因此, $P^0(T_1 < T_r)$ 与 $B_i^{(2)}$ 第 1 次从边界 $(-1, -1 + 2ri) \cup (1, 1 + 2ri)$ 离开的概率一样; 同理, $P^0(T_r < T_1)$ 与 $B_i^{(2)}$ 从边界 $(-1, 1) \cup (-1 + 2ri, 1 + 2ri)$ 首次离开的概率一样。由引理 3 并结合二维 Brownian 运动的共形不变性和对称性, 推出

$$P^0(T_1 < T_r) = 1 - 2P^{i\sqrt{\rho}}(B_{\tau_H}^{(2)} \in (-1, 1)) = 1 - \frac{4}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$$

这里 $\rho = h(r)$ 。也就是, 式 (16) 成立, 定理 7 证明完成。

注 1 由定理 7 并结合 Brownian 运动的尺度性质, 对任意给定的两个正数 $a, b > 0$, 令 $r = b/a$, 若 B_i, \bar{B}_i 都是从 0 点开始且相互独立的一维标准 Brownian 运动, 那么 $|B_i|$ 先大于 a 而 $|\bar{B}_i|$ 不大于 b 的概率与 $|B_i|$ 先大于 1 而 $|\bar{B}_i|$ 不大于 r 的概率相等。例如当 $a = 1$ (或 $a = l$), $b = 2$ (或 $b = 2l$) 时, 这里 $0 < l < \infty$, $|B_i|$ 先大于 a 而 $|\bar{B}_i|$ 不大于 b 的概率都为 0.890 (保留 3 位有效数字)。

参考文献:

[1] 尹传存, 吴荣. Brown 运动关于球及球面的若干问题 [J]. 中国科学, 1996, 26(5): 412 - 422.

[2] 王梓坤. 布朗运动首中与末离的联合分布 [J]. 科学通报, 1994, 13(13): 1168 - 1173.

[3] 徐润, 吕玉华. 标准布朗运动关于线性边界通过概率 [J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2005, 25(4): 709 - 715.

[4] 王梓坤. 布朗运动的末遇分布及极大游程 [J]. 中国科学, 1980, 10(10): 933 - 940.

[5] WANG Z K. The joint distributions of first hitting and last exit for Brownian motion [J]. Chinese Sci Bull, 1995, 40(6): 451 - 457.

[6] LAWLER G F. Hausdorff dimension of cut points for Brownian motion [J]. Electronic Journal of Probability, 1996, 1(2): 1 - 20.

[7] LAWLER G F. Geometric and fractal properties of Brownian motion and random walk paths in two and three dimensions [J]. Bolyai Math Soc Studies, 1998: 219 - 258.

[8] LAWLER G F. The dimension of the frontier of planar Brownian motion [J]. Electron Comm Probab, 1996, 306(5): 29 - 47.

[9] JOHNSON R A. Sequential nonparametrics: invariance principles and statistical inference [J]. Technometrics, 1983, 25(25): 214 - 215.

[10] SIEGMUND D. Sequential analysis: tests and confidence intervals [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[11] SCHRAMM O. Scaling limits of loop-erased random walks and uniform and uniform spanning trees [J]. Israel J Math, 2000, 118(1): 221 - 288.

[12] LAWLER G F. Conformally invariant processes in the plane [J]. Mathematical Surveys & Monographs, 2005, 114: 305 - 351.

[13] WERNER W. Random planar curves and Schramm-Loewner evolutions [J]. In Lectures on Probability Theory and Statistics, 2003, 1840: 107 - 195.

[14] LAWLER G F, SCHRAMM O, WERNER W. Values of Brownian intersection exponents I: Half-plane exponents [J]. Acta Mathematica, 2001, 187(2): 237 - 273.

[15] LAWLER G F, SCHRAMM O, WERNER W. Values of Brownian intersection exponents II: Plane exponents [J]. Acta Mathematica, 2001, 187(2): 275 - 308.

[16] LAWLER G F, SCHRAMM O, WERNER W. Values of Brownian intersection exponents III: two-sided exponents [J]. Ann Int Henri Poincaré, 2002, 38: 109 - 123.

[17] SMIRNOV S. Critical percolation in the plane: conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits [J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series I Mathematics, 2001, 333(3): 239 - 244.

- [3] PARHI N, PADHI S. On asymptotic behavior of delay differential equations of third order 1 [J]. *Nonlinear Anal*, 1998, 34(3): 391 – 403.
- [4] PARHI N, PADHI S. On asymptotic behavior of solutions of third order delay differential equations [J]. *Indian J Pure Appl Math*, 2002, 33:327 – 332.
- [5] 林文贤. 三阶非线性中立型阻尼泛函微分方程的振动性[J]. *安徽大学学报(自然科学版)*, 2015, 39(3): 5 – 9.
- [6] 杨甲山. 具正负系数和阻尼项的高阶微分方程的振动定理[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2012, 51(1): 30 – 34.
- [7] 邱仰聪, 王其如. 一类二阶非线性时标动态方程新的 Kamenev 型振动准则[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2013, 52(6): 26 – 29.
- [8] ZHANG Q X, GAO L, YU Y H. Oscillation criteria for third-order neutral differential equations with continuously distributed delay [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012, 25(10): 1514 – 1519.
- [9] ERBE L. Oscillation criteria for second order nonlinear delay equations [J]. *Canad Math Bull*, 1973, 16: 49 – 56.
- [10] KIGURADZE I T. On the oscillation of solutions of the equation $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t) |u|^{m-1} \text{sign } u = 0$ [J]. *Math Sb*, 1964, 65(2): 172 – 187.
- [11] PHILOS C G. Oscillation theorems for linear differential equation of second order [J]. *Arch Math*, 1989, 53(5): 482 – 492.

(上接第 51 页)

- [18] LAWLER G F, SCHRAMM O, WERNER W. Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees [J]. *Annals of Probability*, 2002, 32(1B): 939 – 995.
- [19] SCHRAMM O, SHEFFIELD S. The harmonic explorer and its convergence to SLE(4) [J]. *Annals of Probability*, 2003, 33(6): 2127 – 2148.
- [20] SCHRAMM O, SHEFFIELD S. Contour lines of the two-dimensional discrete Gaussian free field [J]. *Acta Mathematica*, 2009, 202(1): 21 – 137.
- [21] SMIRNOV S. Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model [J]. *Ann of Math*, 2010, 172(2): 1435 – 1467.
- [22] BASS R F. *Probabilistic techniques in analysis* [M]. New York: Springer Science and Business Media, 1995.
- [23] REVUZ D, YOR M. *Continuous Martingales and Brownian motion*, third edition [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [24] KAGER W, NIENHUIS B. A guide to stochastic Lowner evolution and its applications [J]. *Journal of Statistical Physics*, 2004, 115(5/6): 1149 – 1229.
- [25] PRUDNIKOV A P, BRYCHKOV Y A, ARICHEV O I. *Integrals and series, Vol 2: special functions* [M]. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1990.